

Experiencia basada en la solución de un problema verbal integrador de la asignatura de cálculo diferencial en la carrera de Ingeniería Química

Dra. María Elisa Espinosa Valdés[1], Dra. Julieta del Carmen Villalobos Espinosa[2], Luis Enrique Juárez Cortes[3], Evanelly Martínez Gutiérrez[4]

Resumen*:* Este trabajo tiene como finalidad compartir una experiencia didáctica, basada en la solución de dos problemas verbal-integrador del programa de Cálculo Diferencial (ACF-0901). Esta experiencia consistió en proporcionarle un problema a cada equipo compuesto por estudiantes de primer semestre de la carrera de Ingeniería Química para que lo fueran resolviendo durante el semestre en el que cursan la materia. El problema tenía la característica de que, en la solución, los estudiantes tenían que poner en juego las competencias adquiridas en cada uno de los temas del programa de cálculo diferencial. Al finalizar, la mayoría de los equipos lograron resolver su problema (solamente uno de los cuatro equipos no lo logró) y reconocer todas las competencias utilizadas en su solución. Este trabajo se enmarca dentro de la Investigación - Acción, y se realizó en el periodo agosto-diciembre de 2018.
Palabras claves: Problema, integrador, experiencia, didáctica, cálculo diferencial.

Insights based on the solution of a differential calculus verbal-integrator problem for a chemical engineering degree

Abstract: This work aims to share a didactic experience, based on the solution of a verbal problem integrating the Differential Calculus program (ACF-0901). This experience consisted in providing a differential calculus problem to each team composed of first semester students from the Chemical Engineering degree, which was solved during the current semester. The problem had the characteristic that in the solution, the students had to put into play the skills acquired in each of the subjects of the differential calculus program. At the end, most of the teams managed to solve their problem (only one of the 4 teams did not) and recognize all the skills used in their solution. This work is part of the Research – Action, and was carried out in the period August – December 2018.
Key words: Problem, integrator, experience, didactic, differential calculus.

Introducción

Haciendo alusión a Gaspard, ¡Ah!, las matemáticas… esa materia que nos provocaba sudores fríos en todo el cuerpo cuando estábamos en la escuela… ¡y pensar que algunos incluso siguen cursándolas durante los estudios superiores! Pues bien, esta asignatura está más presente en nuestra vida diaria de lo que nos gustaría creer (Gaspard, 2017).
No obstante, sin matemáticas no se entendería cómo funciona el mundo, no existiría la ciencia, no disfrutaríamos de ningún de los adelantos que forma parte de nuestra vida diaria. Sin matemáticas no sería posible la vida que vivimos hoy (La Provincia, 2013).

Sin embargo, Rico y Lupiañez (2008) menciona que se "destacan dos facetas propias y complementarias sobre las matemáticas escolares: las referencias a las propias redes conceptuales que constituyen los conceptos y estructuras matemáticas y el sentido que se le aporta cuando se interpretan y aplican en contexto", por lo que consideramos muy importante tomar en cuenta estas dos facetas al proponer la tarea. Además, se cree que de todos los métodos empleados para la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, uno de los más eficaces es aprender a resolver problemas (Almeida y Almeida, 2017; Ariel, 2020; Díaz, 2018; Gallardo y Quintanilla, 2019; Loya, 2004; Santos, 2015; Txabari, 2017).

[1] La Dra. María Elisa Espinosa Valdés es Profesora del Departamento de Ciencias Básicas en el Tecnológico Nacional de México campus Instituto Tecnológico de Minatitlán. selisaesva@yahoo.es (Autor corresponsal).
[2] Dra. Julieta del Carmen Villalobos Espinosa es profesora del Departamento de Ingeniería en Industrias Alimentarias en el Tecnológico Nacional de México campus ITS Teziutlán.
[3] Luis Enrique Juárez Cortes es estudiante de Ingeniería Química en el Tecnológico Nacional de México campus Instituto Tecnológico de Minatitlán.
[4] Evanelly Martínez Gutiérrez es estudiante de Ingeniería Química en el Tecnológico Nacional de México campus Instituto Tecnológico de Minatitlán.

Como docente de la materia de cálculo diferencial en una institución de nivel superior donde se imparten diferentes ingenierías, se rige el modelo basado en competencias donde la integración y aplicación estratégica de conocimientos, procedimientos, y actitudes son necesarios para la solución de problemas de contexto, y en escenarios laborales heterogéneos y cambiantes (Ruiz y Tejeda, 2019). Por lo que se cree que, al elaborar nuestro material didáctico, se tienen que formular problemas que lleven al alumno a poder construir su aprendizaje relacionando los nuevos conocimientos con los que ya posee. Ampliamos el concepto de competencias dado con lo mencionado por Rico et al. (2008). Optar por un marco de competencias en el sistema educativo es apostar por la necesidad de dar un sentido constructivista a los aprendizajes. Así, no basta con la transmisión de los saberes, si no que debemos ir más allá para atender los fines formativos del currículo que, esencialmente, es aprender a hacer lo que se hace haciéndolo. Debido a esto, se decidió que los problemas que utilizaríamos en esta experiencia tenían que ser significativos y de interés para los estudiantes de primer semestre de la carrera de Ingeniería Química, los cuales se encuentran cursando la asignatura de cálculo diferencial. Además, para resolverlo se deben promover el uso de todas las competencias adquiridas en el semestre cuando cursan cálculo diferencial y las competencias adquiridas en niveles anteriores.

Este ejercicio representó el primer reto en este trabajo, ya que al buscar problemas verbales en los textos, encontramos que la mayoría no eran significativos para los estudiantes. Además, estos problemas eran muy específicos del tema a tratar. Por ejemplo, si los problemas están en la sección de funciones, las preguntas solamente están enfocadas a encontrar la función; si los problemas están en máximos o mínimos, entonces se encuentran después de haber tratado el tema de derivadas y solamente hacen referencia a encontrar los valores máximos o mínimos a través de la derivada, sin hacer énfasis en la aplicación de todas las competencias adquiridas en los temas anteriores. Así, no permiten que el alumno se dé cuenta de la relación de conceptos que existe entre los diferentes temas de la asignatura. Por lo que la primera propuesta que se realiza en esta experiencia fue cambiar las preguntas que tienen los problemas que se encuentran en los textos, de tal manera que a través de estas nuevas preguntas los estudiantes tengan que ir aplicando todas las competencias adquiridas durante el semestre. Antes de aplicar los problemas que sugerimos como integradores, tenemos que garantizar la validez de contenido de los problemas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Para ello tomamos las siguientes consideraciones:

- El problema con las nuevas preguntas se aplicó a un grupo de expertos formada por cinco (5) profesores de la asignatura, a los cuales se les pidió que resolvieran el problema, y se les preguntó para que materia serviría como material didáctico.
- Después de que los cinco (5) expertos estuvieron de acuerdo en que el problema se podía resolver con la información que tiene y que además el problema se podía utilizar en la asignatura de cálculo diferencial, se procede a pilotearlo con seis (6) alumnos de las carreras de ingeniería para constatar que entendían los problemas.

Fundamentos teóricos

Problema de matemáticas

Se realizó una búsqueda bibliográfica en la que se encontraron varias definiciones de "*problema en matemáticas*" (Mancera, 2000; Santos, 1997, 2015; Schoenfeld, 1985; Vila y Callejo, 2004 y Kantowski, 1980). Después de analizar estas definiciones se tomó el concepto de problema de Kantowski, añadiéndole una parte de la de Santos, de tal forma que un problema es**:** Una situación para la que el individuo que se enfrenta a ella no posee algoritmo que garantice una solución (Kantowski, 1980). El conocimiento relevante de esa persona tiene que ser aplicado en una nueva forma para resolver el problema. El que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática: la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y la tarea (Santos, 2015).

Lo mismo ocurre con el concepto de problema verbal (Gerofsky, 1996; Mayer, 1986; Rivera, 2004). Para este trabajo se toma la definición de Gerofsky, que se muestra a continuación:

- La primera componente es el contexto o la localización de la historia, aunque este componente, a menudo, no sea esencial para la solución misma del problema, pero debe ser significativo para el alumno, para crear interés en encontrar la solución.
- La segunda componente es la información o datos que se necesitan para resolver el problema. A veces se da información irrelevante como señuelo para producir recelo en el resolutor inseguro o se da información de forma implícita que los estudiantes deben saber interpretar.
- La(s) pregunta(s) a la que hay que dar respuesta. (Gerofsky, 1996).

Problema verbal-integrador

Es una tarea que tiene las características mencionadas como problema verbal, donde cambia el papel de alumno y del docente, ya que los estudiantes son responsables de su propio aprendizaje, por medio de una tarea creada por el profesor o por los alumnos. Su solución la pueden encontrar, ya sea en grupo o en forma individual, a partir de la formulación de una situación real (problema). Éste se da en la clase de matemáticas y está diseñado para que los estudiantes pongan en juego sus contenidos (saberes), procedimientos (saber–hacer) y actitudes (saber–ser), para adquirir un aprendizaje significativo que lleve al estudiante al desarrollo de estrategias de aprendizaje dentro del programa de cálculo diferencial y a la solución del problema (Sánchez, 2001).

Trabajo Colaborativo

Para realizar este trabajo tuvimos que tomar en cuenta el aprendizaje constructivista donde está basado el trabajo colaborativo del aprendizaje basado en resolución de problemas (ABP) y lograr en el aula una dinámica en donde los estudiantes deben de trabajar juntos, ayudándose unos a otros, usando todos sus conocimientos previos que les permita la búsqueda de los objetivos de aprendizaje y actividades para la solución de sus problemas (Wilson, 1995 según cita Oviedo, 2019). Este trabajo debe de estar basado en la cooperación, la comunicación, la responsabilidad, la interdependencia positiva y la evaluación grupal. Todos estos comunes del trabajo colaborativo y la solución de problemas, que bajo una adecuada orientación del docente tributa en la formación del estudiante (Rúa et al., 2017).

Investigación–Acción (I–A)

Para realizar esta experiencia nos basamos en Investigación–Acción que dice: la investigación en la acción es una forma de búsqueda auto reflexiva, llevada a cabo por participantes en situaciones sociales (incluyendo las educativas), para perfeccionar la lógica y la equidad de: a) las propias prácticas sociales o educativas; b) comprensión de estas prácticas, y c) las situaciones en las que se efectúan estas prácticas (Kemmis y y McTaggart, 1983).

Desarrollo de la tarea

Lo primero que se tiene que hacer es elegir los problemas a resolver. La mayoría de los especialistas dicen que la cercanía al entorno escolar en la elección de los contextos donde se desarrollan los problemas puede ser favorable para los estudiantes para identificar la situación descrita en los problemas (Fernández, 1997). Por eso, los profesores deben dar a los estudiantes problemas más reales y cercanos, para que éstos se sientan comprometidos de alguna forma para resolverlos (Kilpatrick, 1995). Si los alumnos usan las matemáticas para resolver problemas de sus asignaturas o de su vida diaria, ésta tendrá significado para ellos y tendrán interés en aprenderla. De otra manera, solamente se convierten en acumuladores de conocimientos que ellos mismos manifiestan "*que nunca los van a ocupar"*.

La experiencia se llevó a cabo con un grupo de Ingeniería Química dividido en cuatro (4) equipos (de cuatro (4) estudiantes cada uno) en el Instituto Tecnológico de Minatitlán, durante el periodo agosto-diciembre de 2018. Aquí solamente presentaremos dos de los tres trabajos realizados, ya que un equipo desertó del trabajo.

Para hacer el trabajo se tomó en cuenta el perfil de los estudiantes de primer semestre de Ingeniería Química:

- La mayoría cursó bachillerato de ciencias exactas.
- Son estudiantes de primer o segundo semestre (están en curso de repetición o curso especial).
- La mayoría ya llevó en bachillerato cálculo diferencial e integral.
- La edad promedio de estos estudiantes está entre 18 y 20 años.
- Tienen conocimientos básicos de Química (del bachillerato).
- Tienen conocimientos básicos de Física (del bachillerato).
- Su nivel socioeconómico es medio.
- Pocos trabajan en las industrias cercanas

**Los puntos anteriores fueron datos proporcionados por el Departamento de Control Escolar del ITM, 2018*.

Además de todo lo anterior, analizamos los objetivos a lograr que se manifiesten en el programa, ya que para hallar la solución del problema deben de demostrar que aplicaron todas las competencias que ahí solicitan. Por lo tanto, el objetivo de cada tema se debe de haber alcanzado.

La tarea principal en esta parte del trabajo recae sobre el docente, ya que tiene que formular un problema que en su solución se pongan en juego las competencias adquiridas en cada una de las unidades del programa. Así como un conocimiento de los integrantes de los equipos (diagnóstico) para saber qué problema formular en función de conocimientos y experiencias previas, actitudes e intereses, de cada equipo en lo general y de cada participante en lo particular.

Es necesario mencionar que existen muchos problemas propuestos y resueltos en diferentes fuentes de información del tema de problemas de optimización. Sin embargo, la mayoría son específicos de cada tema de la asignatura, por lo que la diferencia que marca esta experiencia con los problemas de las diferentes fuentes de información consiste en cambiar la pregunta de esos problemas ya existentes, en una serie de preguntas para que el estudiante aplique todo lo aprendido en la asignatura para contestar las preguntas.

Problema 1

"Un volante debe contener 50 pulgadas cuadradas de material impreso con 4 pulgadas de margen arriba y abajo y 2 pulgadas de márgenes a los lados. ¿Qué dimensiones debe tener el volante para que gaste menos papel?".
Purcel y Varberg (1987).

Este fue modificado para un estudiante de primer semestre de Ingeniería Química quedando como sigue:
"Se quiere fabricar un portarretratos con resina. Un cliente que compra al mayoreo, les solicita unos portarretratos con las siguientes características: un área de 50 cm^2 para la fotografía con 4 cm de margen arriba y abajo y 2 cm de márgenes a los lados. Si para fabricar los portarretratos se hace a partir una resina de alto precio:
a) Hallar la(s) función(es) matemática(s) que resuelve el problema, identificando las variables (dependiente e independiente) y el tipo de función encontrada.
b) Hallar el dominio de la(s) función(es) que resuelve(n) el problema, justificando con cálculos su respuesta.
c) Graficar las funciones que nos pueden aportar información del problema y analizar dicha información.
d) Realizar físicamente algunos de los portarretratos que cumplen con los requisitos del enunciado.
e) Utilizando derivada hallar las dimensiones del portarretrato para que se utilice la mínima cantidad de material para fabricar el portarretratos.

Ya que los estudiantes del equipo han leído el problema verbal (las veces que requieran), para saber si han comprendido el problema realizamos una serie de preguntas como:

- ¿Cuál es el contexto del problema?
- ¿Cuáles es la información que tenemos?
- ¿Qué quiero saber?
- ¿Les falta información? ¿Cuál información falta?
- ¿Les sobra información? ¿Cuál información sobra?
- ¿Hay información en forma implícita?
- ¿Toda la información está en forma explícita?
- ¿Qué conocimiento de las asignaturas anteriormente cursadas crees que necesitas para resolver el problema?
- ¿Qué temas de la asignatura de cálculo diferencial necesitas para resolver el problema?

Una vez constatada la comprensión del problema, se procede a realizar la planeación. En esta fase es muy importante ser capaz de describir y comprender lo que realmente se está haciendo, así como los valores y las metas que sustentan esa realidad (Colás y Buendía, 1998).

Con esta información, los integrantes del equipo planifican mediante una mesa de discusiones del equipo y el docente, lo que se proponen realizar para hallar la solución. Todo lo que se va ejecutando está siendo observado por el docente y un docente invitado a la sesión. Esto con la finalidad de observar cómo se está dando la dinámica del equipo, ya que hay que recordar que todo este trabajo es flexible y se puede ir modificando lo planeado. A continuación, se muestra el resultado del equipo que trabajo con este problema:
a) Hallar la(s) función(es) matemática(s) que resuelve el problema, identificando las variables (dependiente e independiente) y el tipo de función encontrada. La respuesta se muestra en la Figura 1.

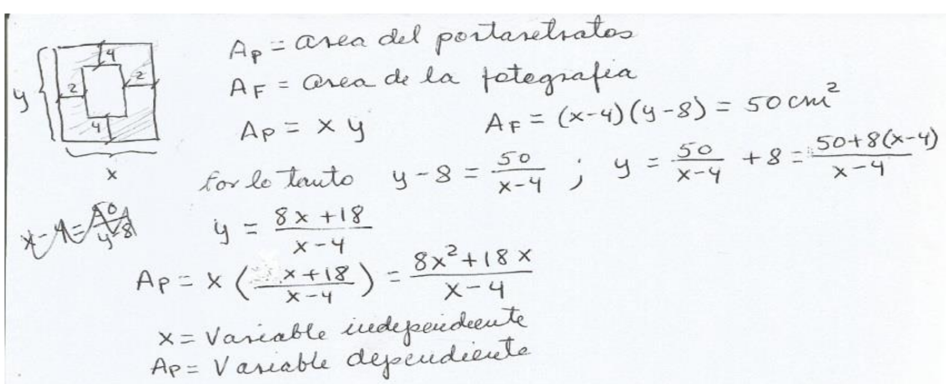


Figura 1. Definición de variables y función que resuelve el problema.

Dependiendo del problema propuesto, se les van haciendo preguntas a los estudiantes integrantes del equipo. Mencionamos algunas de las preguntas y respuestas, independientemente de si la respuesta estaba bien o mal:
¿" y" podría ser la variable independiente? Argumente su respuesta.

"No, porque x siempre es la variable"

¿Podría A_f ser la variable dependiente? Argumente su respuesta.

Vol. 12, No. 1, 2021
ISSN 1940-1116

"No, porque esa es una constante"
¿Se podría plantear la función suponiendo "x" como la base de A_f?
"No sabemos"

Así se pueden generar varias preguntas dependiendo del problema y en función de las respuestas, el docente evalúa las competencias de cada uno de los estudiantes integrantes del equipo con respecto a los diferentes temas de la asignatura.

Al terminar este inciso se les sugiere a los estudiantes que mediante una lluvia de ideas para que mencionen las competencias que utilizaron para hallar la solución del inciso "a" entre las respuestas que dieron: *utilizamos temas de aritmética, álgebra, geometría, definición de variables, concepto de función, etc*. Esto con la finalidad de que vean todos los recursos con los cuentan para resolver los problemas que se les van presentando.

b) Hallar el dominio de la(s) función(es) que resuelven el problema. La respuesta se muestra en la Figura 2.

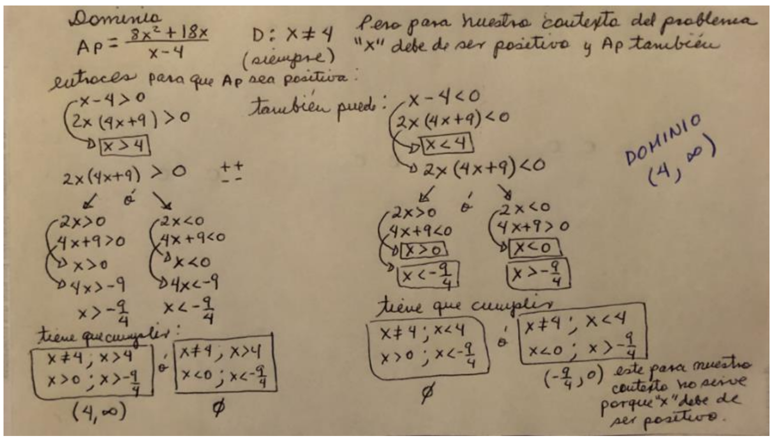


Figura 2. Cálculo del dominio de la función.

Al terminar este inciso se les sugiere a los estudiantes que mediante una lluvia de ideas mencionen las barreras que fueron encontrando y como las resolvieron, así como las competencias que utilizaron para hallar la solución del inciso "b" entre las respuestas que dieron están: *utilizamos temas de aritmética, álgebra, desigualdades, dominio de una función, etc.*

c) Graficar las funciones que nos puedan aportar información del problema y analizar dicha información, para esto los estudiantes realizan los cálculos que se muestran en la Figura 3.

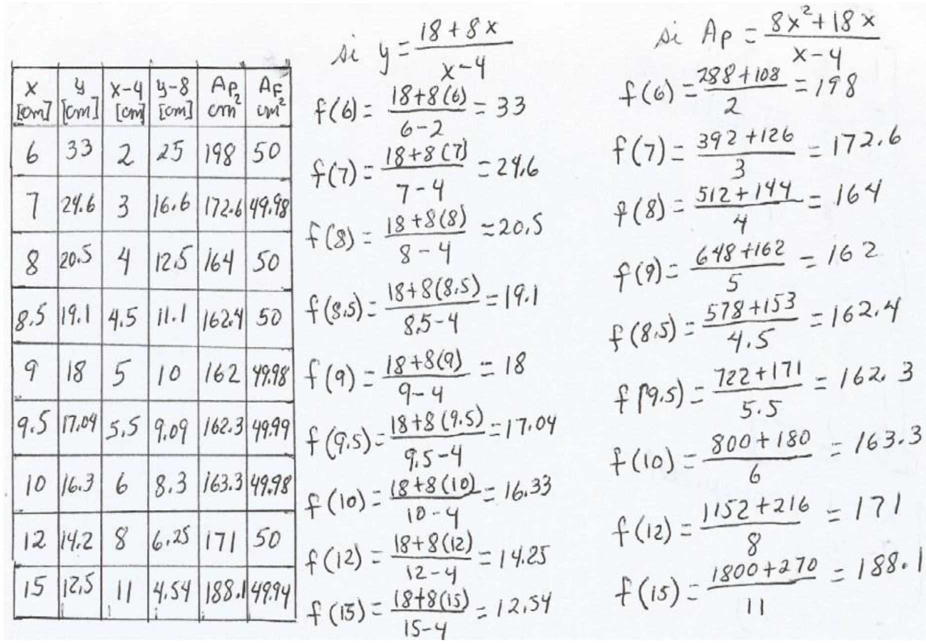


Figura 3. Cálculos realizados a partir del dominio.

Las Figuras 4, 5 y 6 representan las Gráficas que proponen los integrantes del equipo:

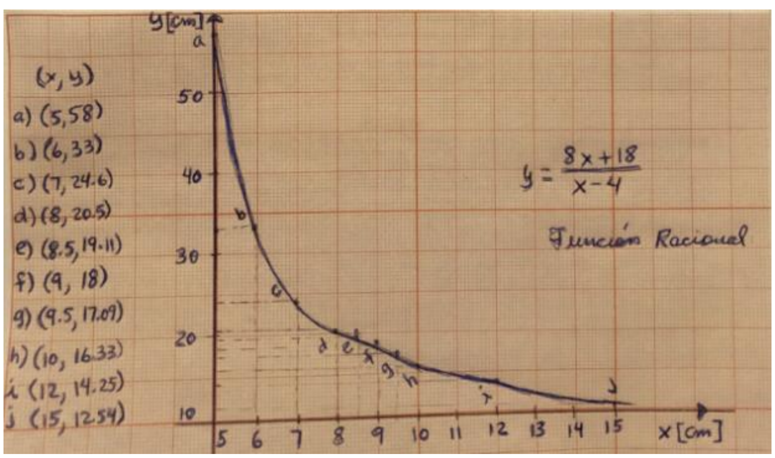


Figura 3. Base del portarretratos contra la altura.

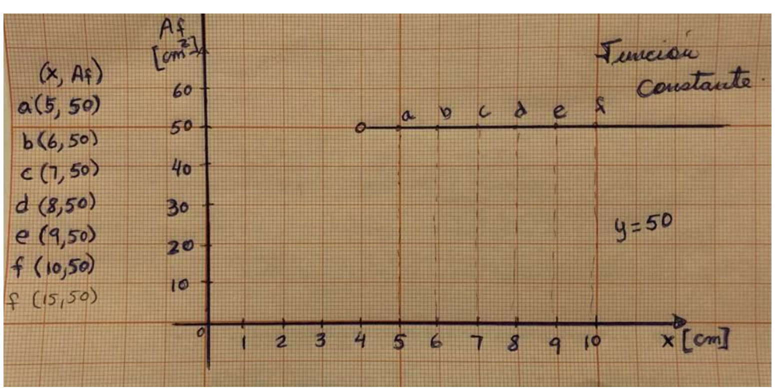


Figura 4. El largo de la base (x) contra el área de la fotografía (Af).

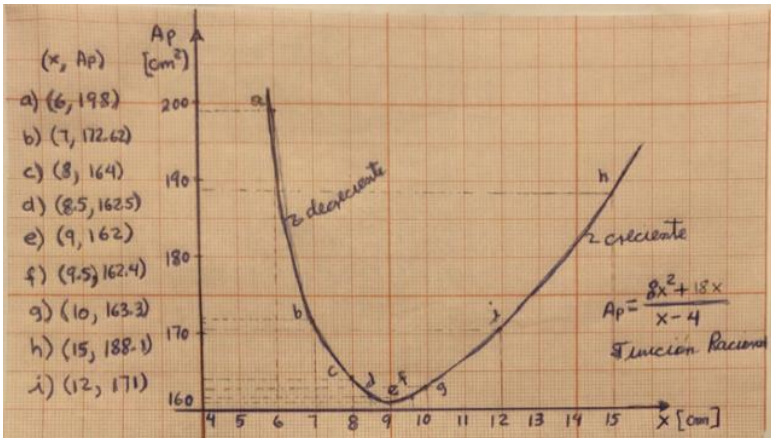


Figura 6. La medida de la base (x) contra el área del portarretratos (Af).

En este inciso se les pueden hacer preguntas acerca de la información que proporciona cada Grafica, por ejemplo:

- ¿Explica que información te podrían aportar cada una de estas gráficas para toma de decisiones?
- De las gráficas ¿Cuál sería el portarretratos que utiliza menor cantidad de material y de cual grafica estas obteniendo el dato?
- ¿Al variar la longitud de la base como se modifica el área destinada para la fotografía y de cual grafica lo obtiene?
- ¿Al aumenta la altura del portarretrato que le pasa la medida de la base? ¿De qué grafica obtiene esta respuesta?

Así podemos generar un número amplio de preguntas con la finalidad de constatar que los estudiantes están entendiendo cada una de las gráficas.

Al terminar este inciso se les sugiere a los estudiantes que mediante una lluvia de ideas mencionen las barreras que fueron encontrando en la medida que avanza el trabajo, así como las competencias que utilizaron para hallar la solución del inciso entre las respuestas que dieron están: *temas de aritmética, álgebra, concepto de función, tipo de funciones, concepto de gráficas, conceptos de dibujo, etc.*

d) Realizar físicamente algunos de los portarretratos que cumplen con los requisitos del enunciado (los alumnos de este equipo se codificaron con A, B, y C, ya que uno deserto).

Esta actividad como se puede ver a continuación la realizan los estudiantes con material de desecho (hojas de recicladas, alguna revista y pegamento) y pueden pasar todos los integrantes del grupo a medir cualquiera de los portarretratos y comparar lo que miden con todos los cálculos que están expuestos en la presentación final.

El participante A eligió hacerlo su portarretratos con 10 cm de base y 16.8 cm de altura. El participante B eligió que mida 9 cm de base y 18 cm de altura. El participante C decidió presentar el portarretrato con 8 cm de base y 20.5 de altura. Lo anterior se puede observar en la Figura 7. Todos cumplen con las condiciones iniciales del enunciado. Aquí se les puede pedir a los estudiantes que vayan diciendo de donde tomaron esas medidas y que expliquen por qué dicen que cumple con las condiciones iniciales del problema.

Figura 5. Portarretratos que realizaron los estudiantes.

Al terminar este inciso se les sugiere a los estudiantes que mediante una lluvia de ideas digan las competencias puestas en práctica para hacer su portarretratos. Entre las respuestas que dieron: *geometría, funciones, dibujo, etc.*
e) Utilizando derivada hallar las dimensiones del portarretrato (Figura 8) para que se utilice la mínima cantidad de material para fabricar el portarretratos.

$$A_P = \frac{18x + 8x^2}{x-4}$$

$$\frac{dA_P}{dx} = \frac{(x-4)(18+16x)-(18x+8x^2)(1)}{(x-4)^2} = \frac{8x^2-64x-72}{(x-4)^2}$$

$$\frac{8x^2-64x-72}{(x-4)^2} = 0 \quad \therefore \quad 8x^2-64x-72=0 \qquad x^2-8x-9=0$$

factorizando $(x-9)(x+1)=0$ solo para: $x=9$ y $x=-1$ no puede ser valor de "x"

solamente analizamos $x=9$

$$\frac{d^2A_P}{dx^2} = \frac{(x-4)^2(16x-64)-(8x^2-64x-72)[2(x-4)]}{(x-4)^4}$$

$$\frac{d^2A_P}{dx^2} = \frac{(9-4)^2(80)-[648-576-72](10)}{(9-4)^4} = \frac{2000}{625}$$

$$\frac{d^2A_P}{dx^2} = + \Rightarrow$$ que cuando $x=9$ tenemos un mínimo

Figura 6. Cálculo del valor mínimo con derivada.

Reflexionando a cerca del trabajo realizado, los estudiantes concluyen que el alumno B es el que tiene **el marco que utiliza la menor cantidad de material.** Comprueban su respuesta **con la tabla de valores que realizaron, con las gráficas y con la ayuda de la derivada.**

Problema 2
"La longitud del trozo punteado en la Figura 9 mide 108 cm.

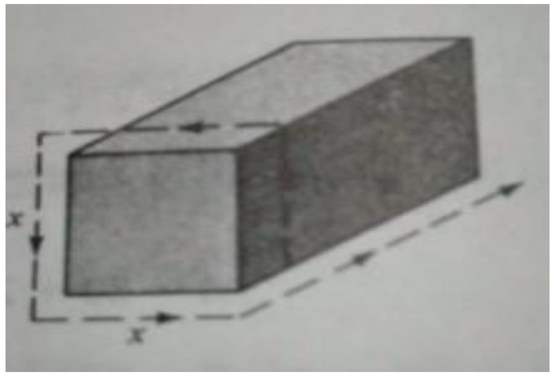


Figura 7. Paquete con las condiciones que pide el problema.

***Hallar las dimensiones de este paquete con base cuadrada que hace máximo el volumen*". Larson, 1995**

En este problema solamente se modificaron las preguntas quedando como sigue:

- Hallar la función matemática que resuelve el problema, identificando las variables y el tipo de función encontrada.
- Hallar el dominio de la(s) función(es) que resuelven el problema.
- Graficar la(s) función(es) que nos pueden aportar información del problema y analizar dicha información.
- Realizar físicamente algunos de los paquetes que cumplen con los requisitos del enunciado.
- Utilizando derivada hallar las dimensiones de este paquete con base cuadrada que hace máximo el volumen.

Ya que los estudiantes del equipo han leído el problema verbal, para saber si han comprendido realizamos una serie de preguntas como:

- ¿Cuál es el contexto del problema?
- ¿Cuáles es la información que tenemos?
- ¿Qué quiero saber?
- ¿Les falta información? ¿Cuál información falta?
- ¿Les sobra información? ¿Cuál información sobra?
- ¿Hay información en forma implícita?
- ¿Toda la información está en forma explícita?
- ¿Qué conocimiento de las asignaturas anteriormente cursadas crees que necesitas para resolver el problema?
- ¿Qué temas de la asignatura de cálculo diferencial necesitas para resolver el problema?

Una vez comprobada la comprensión del problema, se procede a realizar la planeación. En esta fase es muy importante ser capaz de describir y comprender lo que realmente se está haciendo, así como los valores y las metas que sustentan esa realidad (Colás y Buendía, 1994).

Con esta información los integrantes del equipo planifican**,** mediante una mesa de discusiones con el docente, lo que proponen realizar para hallar la solución. Todo lo que se va ejecutando está siendo observado por el docente y un docente invitado a la sesión. Esto con la finalidad de observar cómo se está dando la dinámica del equipo, ya que hay que recordar que todo este trabajo es flexible y se puede ir modificando lo planeado. A continuación, se muestra el resultado del equipo que trabajo con este problema:

Respuesta del problema 2

a) Hallar la función matemática que resuelve el problema, identificando las variables y el tipo de función encontrada. Los cálculos dados por el equipo se muestran en la Figura 10.

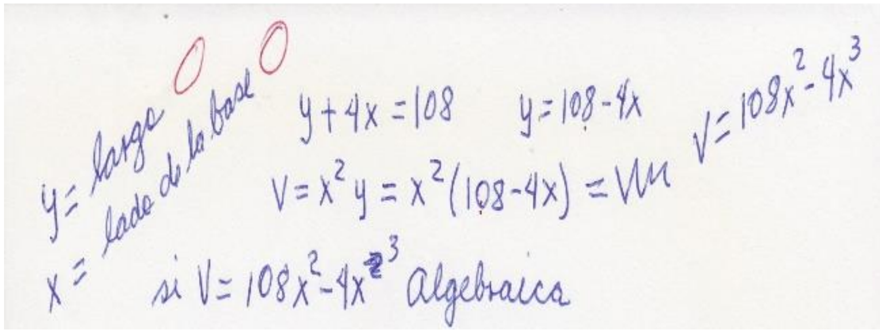


Figura 8. Función que resuelve el problema y definición de las variables.

Como en el caso anterior se realizan preguntas a los estudiantes integrantes del equipo, mencionamos algunas de las preguntas y respuestas independientemente de si la respuesta estaba bien o mal:

- ¿"y" podría ser la variable independiente? Argumente su respuesta.
- "Si tanto "x" como "y" podrían ser variables independientes"
- ¿De qué depende? Argumente su respuesta.
- "Del despeje que se realiza"
- ¿Quién es la variable dependiente?
- "Es el volumen del paquete"

Con la finalidad de que vean los recursos con los que cuentan para resolver un problema, se les sugiere realizar mediante una lluvia de ideas un listado de competencias que tuvieron que utilizar para hallar la función para resolver el problema: sus respuestas fueron *perímetro que vimos en primaria, volumen, funciones, álgebra, aritmética, tipos de funciones, etc.*

b) Hallar el dominio de la función(es) que resuelven el problema, el cálculo que presenta el grupo se muestra en la Figura 11.

Al terminar este inciso se les sugiere a los estudiantes que mediante una lluvia de ideas digan las competencias que utilizaron para hallar la solución del inciso "b" entre las respuestas que dieron están: *utilizamos temas de aritmética de primaria, álgebra de secundaria, desigualdades del primer tema de cálculo, dominio de una función, etc.*

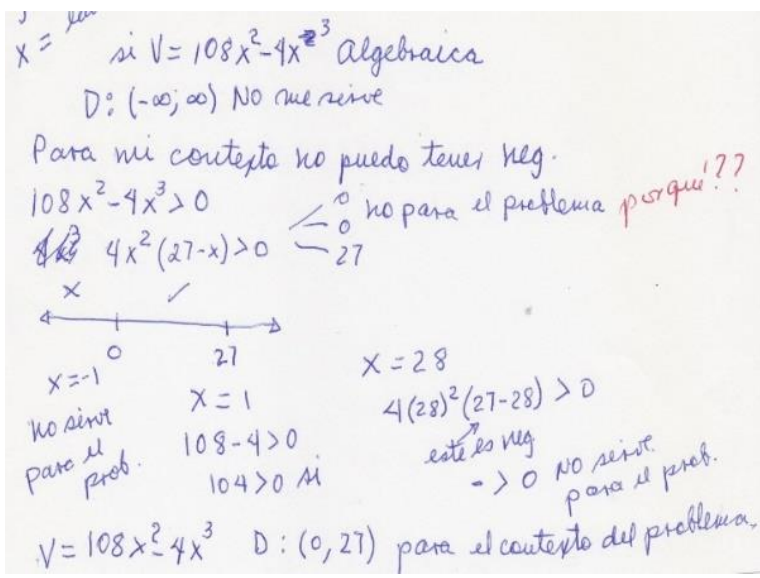
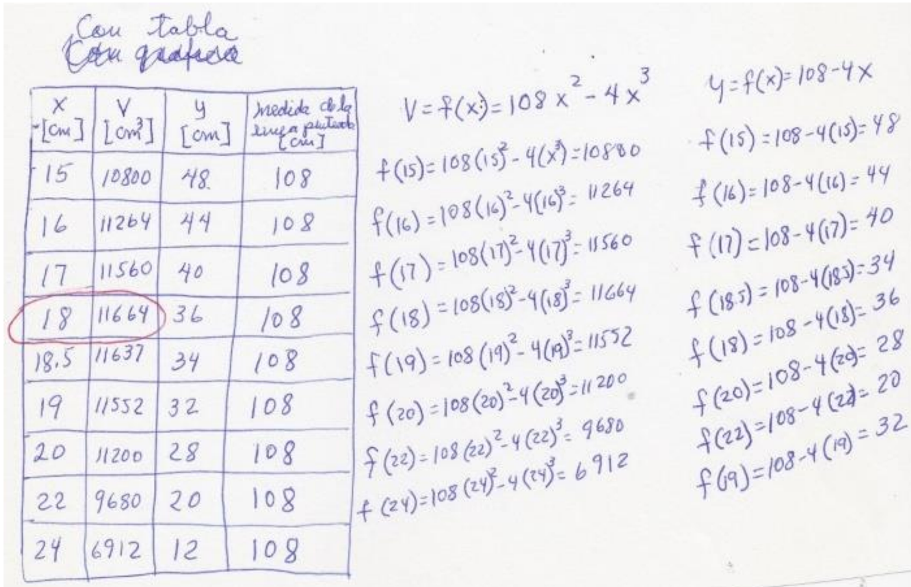


Figura 9. cálculo del dominio de la función que resuelve el problema.

b) La Figura 12 muestra los cálculos realizados para obtener las Figuras 13, 14, 15, y 16 que muestran las gráficas que los integrantes del equipo proponen para obtener información del problema y les pedimos analizar dicha información.



Con tabla
Con gráfica

x [cm]	V [cm³]	y [cm]	medida de la línea punteada [cm]
15	10800	48	108
16	11264	44	108
17	11560	40	108
18	11664	36	108
18.5	11637	34	108
19	11552	32	108
20	11200	28	108
22	9680	20	108
24	6912	12	108

$V = f(x) = 108x^2 - 4x^3$

$f(15) = 108(15)^2 - 4(x^3) = 10880$
$f(16) = 108(16)^2 - 4(16)^3 = 11264$
$f(17) = 108(17)^2 - 4(17)^3 = 11560$
$f(18) = 108(18)^2 - 4(18)^3 = 11664$
$f(19) = 108(19)^2 - 4(19)^3 = 11552$
$f(20) = 108(20)^2 - 4(20)^3 = 11200$
$f(22) = 108(22)^2 - 4(22)^3 = 9680$
$f(24) = 108(24)^2 - 4(24)^3 = 6912$

$y = f(x) = 108 - 4x$

$f(15) = 108 - 4(15) = 48$
$f(16) = 108 - 4(16) = 44$
$f(17) = 108 - 4(17) = 40$
$f(18.5) = 108 - 4(18.5) = 34$
$f(18) = 108 - 4(18) = 36$
$f(20) = 108 - 4(20) = 28$
$f(22) = 108 - 4(22) = 20$
$f(19) = 108 - 4(19) = 32$

Figura 10. Cálculos de la información para graficar

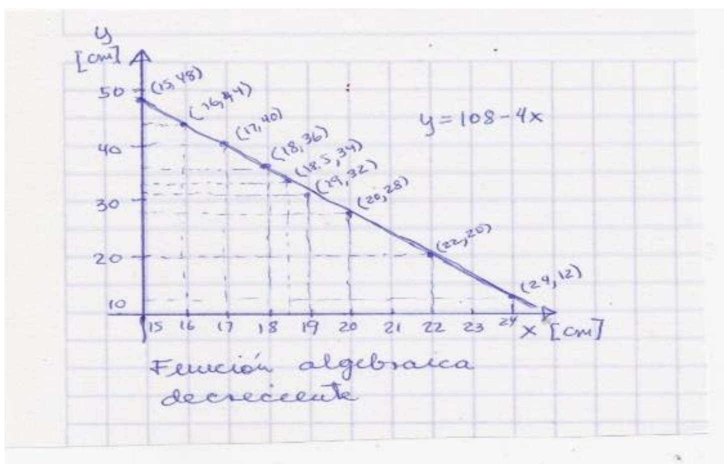


Figura 11. Base (x) contra la medida de la altura (y) del paquete.

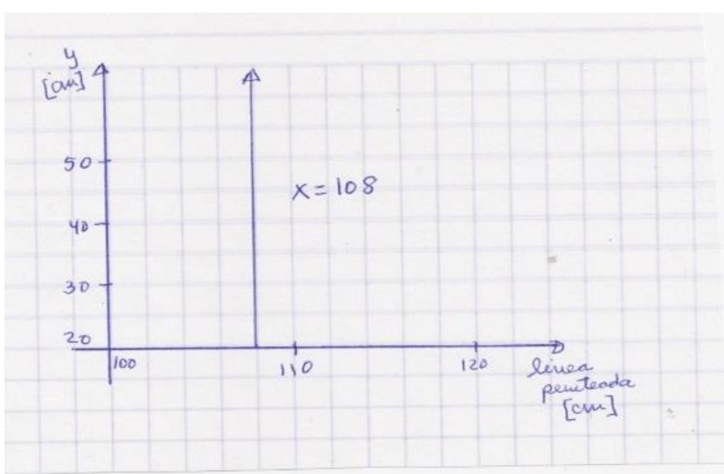


Figura 12. Longitud de la línea punteada contra la altura del paquete (y).

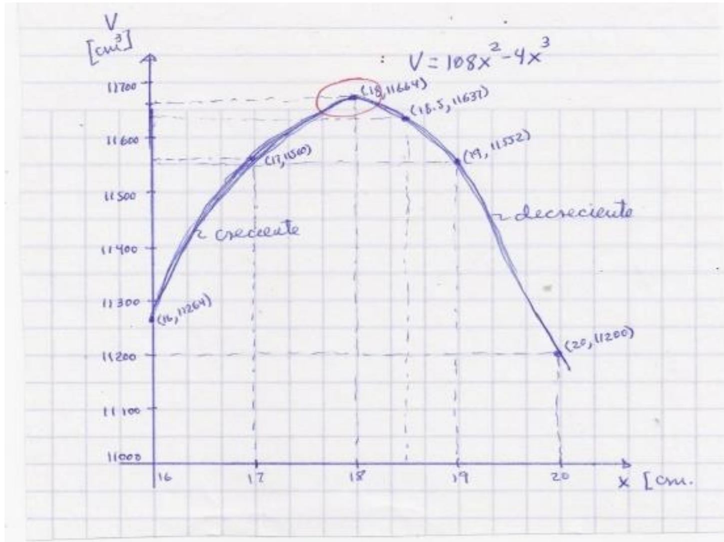


Figura 13. Lado de la base (x) contra el volumen del paquete.

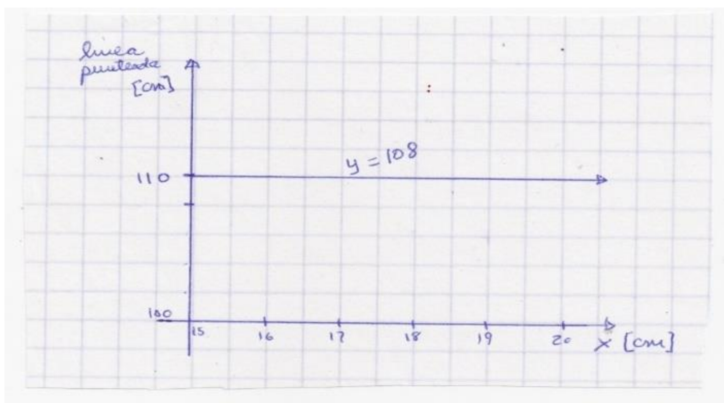


Figura 14. Lado de la base (x) contra la longitud de la línea punteada.

d) Realizar físicamente algunos de los paquetes (Figura 17) que cumplen con los prerrequisitos del enunciado.

Los alumnos realizan los paquetes con material reciclado ya que es práctico conseguir cartón de cajas que ya no se ocupan, pegamento, tijeras y una regla, además pueden comprobar las condiciones que les pide el problema y lo comprueban con los cálculos realizados hasta aquí.

Figura 15. Paquetes realizados por los alumnos.

e) Utilizando derivada hallar las dimensiones de este paquete con base cuadrada que hace máximo el volumen, los cálculos que realiza el equipo se muestran en la Figura 18.

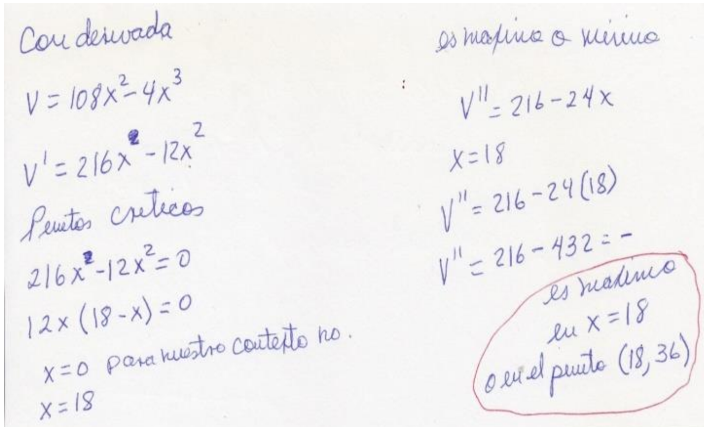


Figura 16. Cálculo de las dimensiones del paquete utilizando derivada.

Conclusiones

Por último, las conclusiones que se obtienen son el producto de la reflexión del trabajo realizado. Las dividimos en tres grandes áreas: lo referente al alumno, lo referente al profesor y lo observado por los autores del trabajo.

Alumno:

- Los alumnos encuentran lo que les pide el problema y manifiestan que cada paso que dan lo van entendiendo, no solo se dedican a hacer "*cálculos simplemente por hacer".*
- Cuando terminan la tarea propuesta, los estudiantes mencionan que es importante ver la aplicación de lo que están aprendiendo y comentan que "creían *que las matemáticas nunca las iban a ocupar"*.
- No todos los estudiantes están preparados para realizar un trabajo donde tiene que resolver un problema verbal, ya que ellos mismos manifiestan que casi en ninguna materia resuelven problemas. Se presentó deserción en uno de los equipos ya que terminó con dos (2) participantes solamente y ellos decidieron no presentar el trabajo al final. El trabajo del equipo tres no lo presentamos aquí.

Profesor:

- Al finalizar esta experiencia encontramos que tres de los cuatro equipos lograron resolver el problema y relacionar la solución con las competencias adquiridas en cada tema. El equipo que no encuentra la solución tiene problemas desde entender el enunciado del problema, por lo que no lograron encontrar el modelo que lo resuelve, además tenían falta de prerrequisitos.
- Se detectó que uno de los problemas más grandes que presentan todos los equipos es obtener la(s) función(es) que representan el modelo que resuelven el problema. Sin embargo, observamos dicho modelo solamente utilizan casi siempre (y dependiendo del problema) los conceptos de área, perímetros, etc., de figuras geométricas que ellos aprendieron en la primaria o en la secundaria.
- Creemos que la didáctica basada en resolución de problemas debería de formar parte de la enseñanza desde los niveles de primaria, ya que el problema sería más significativo para ellos y, además, aprenderían a ir transformando su realidad en enunciados (problemas verbales).
- En los dos problemas expuestos aquí usamos las dos facetas mencionadas por Rico (2008): 1) las referentes a las redes conceptuales que construyen los conceptos y estructuras matemáticas, y 2) el sentido que aportan cuando se interpretan y se aplican en contexto.

Autores del trabajo*:*

- Como todos somos docentes de la asignatura estas experiencias nos servirán para la planeación del siguiente curso.
- La formulación del problema es una de las tareas más complejas para realizar este trabajo.
- Entre las observaciones que hicimos, destaca lo relacionado con la dinámica que se da en el equipo, ya que los estudiantes están acostumbrados a fraccionar el conocimiento dividiendo las tareas y no realizan trabajo colaborativo.
- Sabemos que estos cálculos, con excepción de la función que resuelve el problema, las pueden realizar los estudiantes con la ayuda de paquetería como: Geogebra, Derive, etc., pero este curso trata de que ellos lo

vayan realizando y entendiendo cada cálculo, por lo que la propuesta del equipo de trabajo, es que al terminar el curso se les den unas sesiones a los estudiantes en el centro de cómputo para que realicen todos los cálculos con la ayuda de un paquete, pero ahora van entendiendo todo lo que el paquete está realizando.

Referencias

Almeida, B., y Almeida, J. (2017). Comprender antes de resolver. *Revista científico-pedagógica Atenas Vol 3 (39), 48-63*

Ariel, E. (2020). *Algebra Vs. Aritmetica. Una propuesta didáctica que posibilita la construccion problematizada de un espacio matematico de trabajo constructivista en el aula.* Educación Matemática.Vol 32 (1). 178-192.

Colás, P. y Buendía, L. (1998). *Investigación Educativa*. Sevilla: Alfar.

Díaz, J.A. (2018). *Los métodos de resolución de problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático.* Brasil: Bolema. Vol. 32 (60).

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Gallardo, J. y Quintanilla, V.A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 97-122.

Gaspard (2017). *La omnipresencia de las matemáticas en nuestra vida cotidiana*. En Superprofe Magazine, recuperado el 20 de agosto de 2020 en www.superprof.mx/blog/aplicaciones-practicas-de-las-matematicas/

Gerofsky, S. (1996). *A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics, 16, 36-45.

Hernández, R. Fernández, C y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.

Kantowski, M. G. (1980). *Some Thoughts on Teaching for Problem Solving.* In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.*)*, Problem Solving in School Mathematics. NCTM Yearbook 1980. 195–203. Reston (VA): Council.

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.

Kilpatrick, J. (1995). Seminario de Investigación. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas.* Evaluación e Historia, 55-57. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Larson, R.E. y Hostetler, R.P. (1995). *Cálculo*. Colombia: Mc Graw Hill. pp.176

La Provincia, (2013). Periódico De Palma. Recuperado el 22 de agosto de 2020 en www.la provincia.es

Loya, R. (2004). *Aprendizaje Basado en Problemas*. México: Trillas.

Mancera, E. (2000*). Saber matemáticas es saber resolver problemas*. Editorial Iberoamericana. México.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona, Paidós.

Oviedo, B. y Zhuma Mera, E. (2019). Estrategias de trabajo colaborativo ABP - TPA. *Universidad y Sociedad* [online]. vol.11, n.2, pp.153-158.

Planes y programa de estudio 2009 – 2017. Normateca del TecNM programa ACF-0901. Recuperado el 20 de agosto de 2020 en www.tecnm.mx

Purcel, E y Varberg, D, (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. Prentice Hall. México. Pp. 170

Rico, L. y Lupiañez, J.L. (2008). *Competencias Matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid. Alianza Editorial. p.174

Rivera, L.M. (2004). *Primeros Auxilios para resolver Problemas Verbales en tus cursos de Matemáticas*. Universidad Interamericana de Puerto Rico - Recinto de Ponce

Rúa, J.A, Bernaza, G. J. y Bediya, J. A. (2017). El trabajo colaborativo y la solución de problemas de tipo matemático: Una guía para la formación ciudadana. Universidad de Medellín, Colombia

Ruiz, M.L. y Tejeda, P.L. (2019). *Los proyectos Integradores, una perspectiva pedagógica de desarrollo del ingeniero*. En Revista Electrónica ANFEI digital (11)

Sánchez, I. (2001). *Validación de una metodología basada en actividades de aprendizaje con técnicas creativas para estudiantes universitarios.* Revista Journal Of Sciencie Education, Bogotá, Colombia. Año 2. (2). 86-90.

Santos, L.M. (1997). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas*. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Santos, L.M. (2015). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Txabarri, J.G. (2017). *La resolución de problema aritméticos – algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO).* Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 20(2). 167-192.

Vila, A. y Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar*. Editorial Narcea. Madrid, España.